

**Appunti del corso di Geometria dei Galleggianti 1**

**Marco FERRANDO**

## I Geometria delle masse

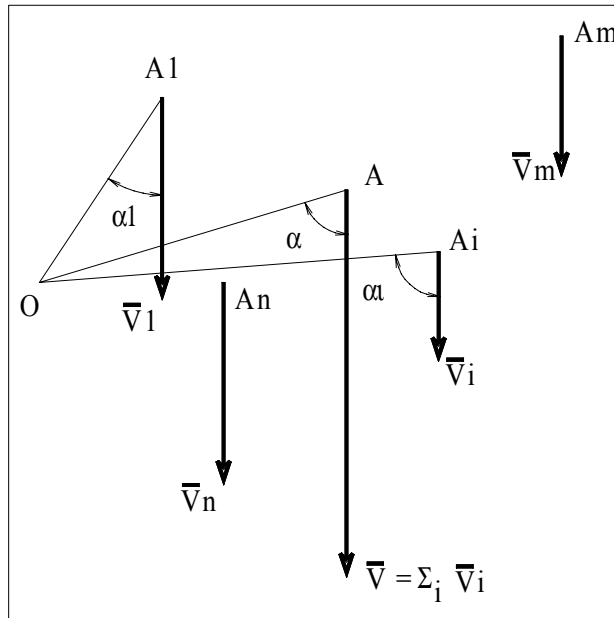
In questo capitolo verranno esposti i procedimenti che consentono di calcolare:

- aree, momenti statici, posizioni dei baricentri, momenti d'inerzia, ellissi (principali e centrali) d'inerzia di figure piane;
- volumi, momenti statici, posizioni dei baricentri di solidi di forma qualsiasi.

### A Aree, volumi e loro centri

#### A1 Richiami di teoria dei vettori

Si richiama dalla teoria dei vettori quanto riguarda la definizione e la determinazione del “Centro A di un sistema piano di vettori  $\vec{V}_i$  applicati in  $A_i$ , paralleli ed equiversi”.



Il centro è il punto A del piano dove si può pensare applicato un sistema equivalente costituito da un unico vettore  $\vec{V}$ , parallelo ed equiverso ai vettori  $\vec{V}_i$  del sistema, la cui intensità è data da  $|\sum_i \vec{V}_i|$  ed il cui momento rispetto ad un qualsiasi punto O del piano è uguale alla somma dei momenti dei singoli vettori  $\vec{V}_i(A_i)$  rispetto allo stesso punto O.

Si ha quindi:

$$\vec{V} = \sum_i \vec{V}_i \quad (\text{A.1})$$

$$\overline{\mathbf{OA}} \wedge \vec{V} = \sum_i \overline{\mathbf{OA}_i} \wedge \vec{V}_i \quad (\text{A.2})$$

Passando alle grandezze scalari la (A.1) può essere riscritta nella forma seguente:

$$|\vec{V}| = |\sum_i \vec{V}_i| = \sum_i |\vec{V}_i| = \sum_i V_i$$

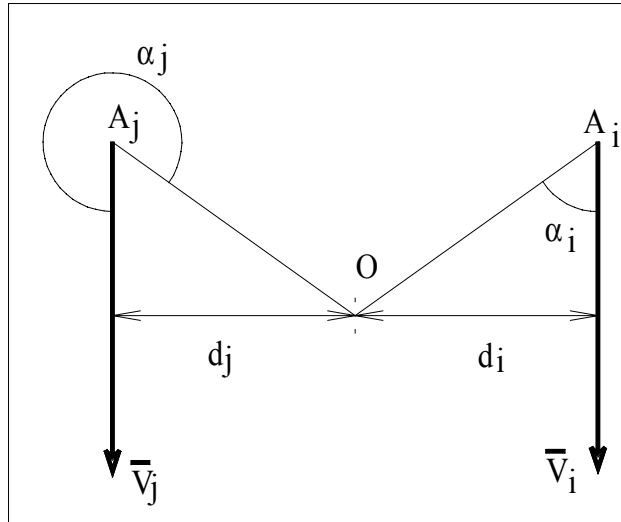
Trasponendo in forma scalare anche la (A.2) il primo membro diviene:

$$|\overline{\mathbf{OA}} \wedge \vec{V}| = |\overline{\mathbf{OA}}| \cdot |\vec{V}| \sin \alpha$$

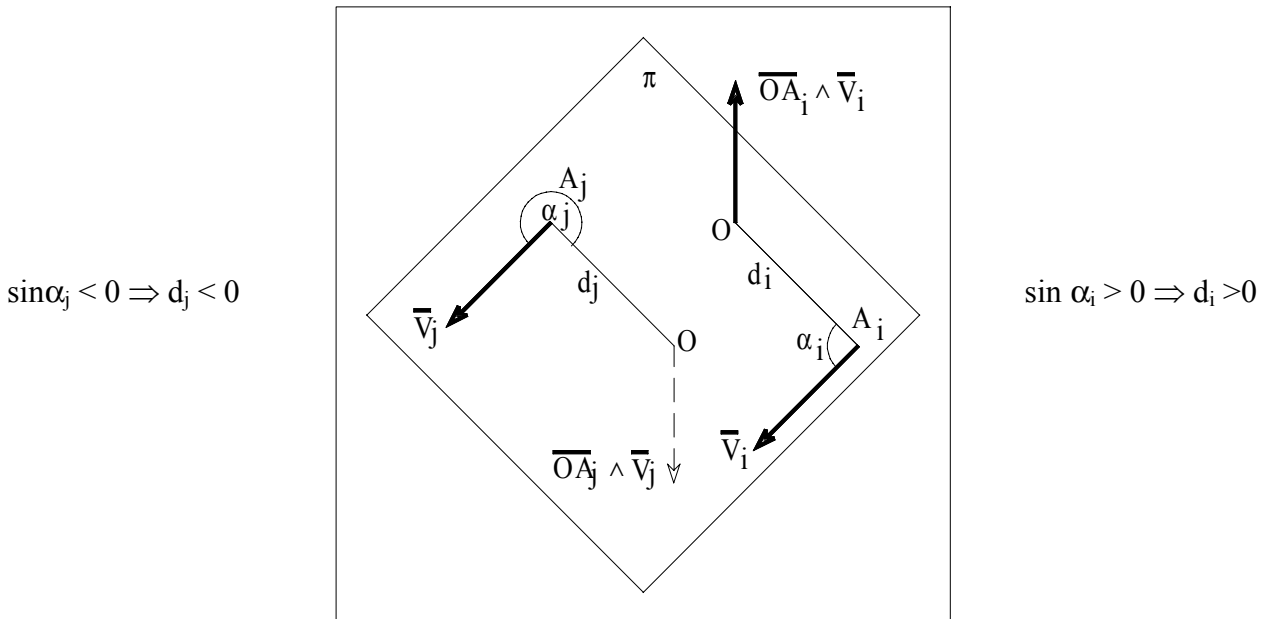
mentre il secondo membro, essendo i vettori equiversi oltre che paralleli, assume la forma seguente:

$$\left| \sum_i \overline{\mathbf{OA}_i} \wedge \vec{V}_i \right| = \sum_i \left| \overline{\mathbf{OA}_i} \wedge \vec{V}_i \right| = \sum_i \left| \overline{\mathbf{OA}_i} \right| \cdot \left| \vec{V}_i \right| \sin \alpha_i$$

I prodotti  $\left| \overline{\mathbf{OA}_i} \right| \sin \alpha_i$  e  $\left| \overline{\mathbf{OA}_j} \right| \sin \alpha_j$  rappresentano le distanze  $d_i$  e  $d_j$  delle rette d'azione dei vettori  $V_i$  e  $V_j$  dal punto O.



Il segno delle distanze  $d_i$  e  $d_j$  resta determinato dal segno degli angoli  $\alpha_i$  ed  $\alpha_j$  come illustrato nella figura seguente:



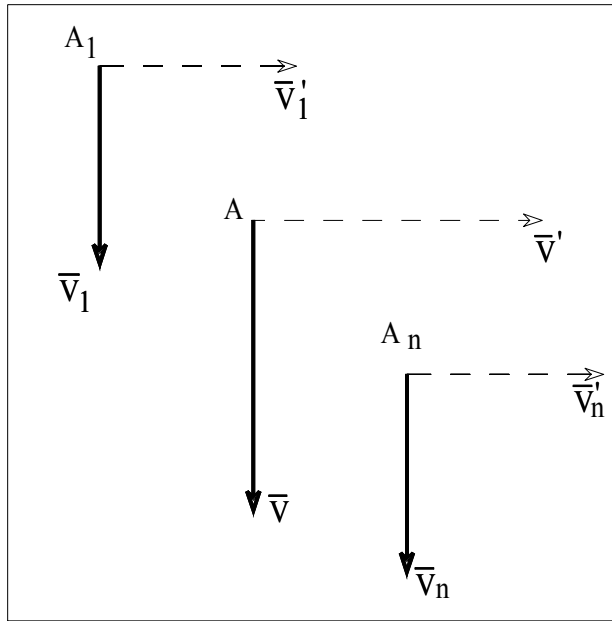
A questo punto è possibile calcolare la distanza  $d$  da O della retta d'azione del risultante  $\vec{V}$ :

$$d = \left| \overline{\mathbf{OA}} \right| \sin \alpha = \frac{\sum_i \left| \overline{\mathbf{OA}_i} \right| \cdot V_i \sin \alpha_i}{\sum_i V_i}$$

Naturalmente la summenzionata retta d'azione sarà parallela alla direzione dei vettori  $\vec{V}_i$ .

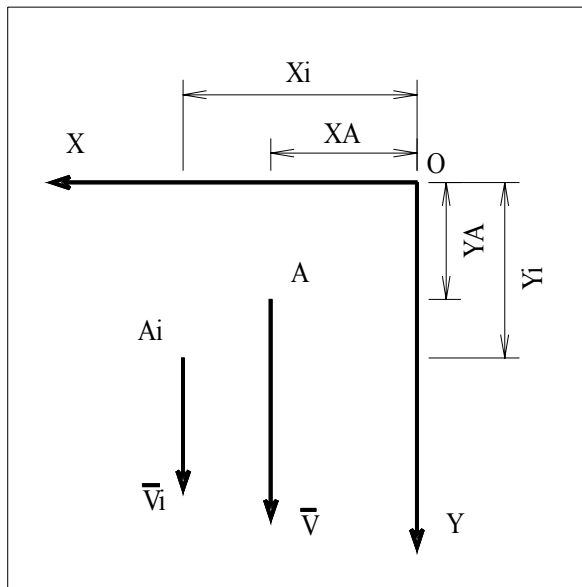
Se si immagina di mutare la direzione dell'intero sistema di vettori applicati si può determinare la nuova retta d'azione del risultante. Essa sarà parallela alla nuova direzione dei vettori componenti il sistema ed incontrerà la prima nel punto A centro del sistema. Questa situazione è illustrata nella fi-

gura seguente ove la configurazione tratteggiata corrisponde a quella dopo la rotazione,



**A2 Teorema dei momenti statici**

Solitamente si usa assumere come riferimento una coppia di assi cartesiani X ed Y; è possibile allora determinare le coordinate del centro A del sistema di vettori rispetto a questa coppia (XY). Si ha una ulteriore semplificazione se come punto O (polo) si sceglie l'origine degli assi stessi come illustrato nella figura seguente. In detta figura, per semplicità, si è rappresentato solo uno degli n vettori che costituiscono il sistema.



Utilizzando la notazione illustrata nella figura si ottiene:

$$V = \sum_i V_i \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned} x_A \sum_i V_i &= \sum_i x_i V_i \\ y_A \sum_i V_i &= \sum_i y_i V_i \end{aligned} \tag{A.4}$$

dalle quali si ricavano le equazioni:

$$x_A = \frac{\sum_i x_i V_i}{\sum_i V_i}$$

$$y_A = \frac{\sum_i y_i V_i}{\sum_i V_i}$$
(A.5)

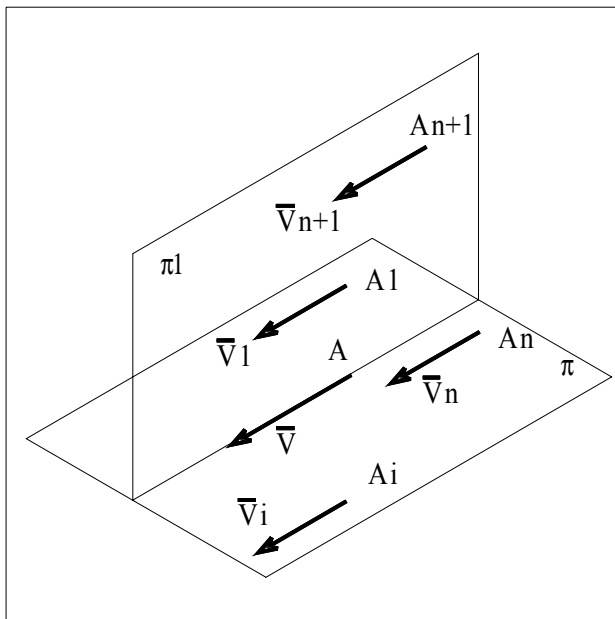
che forniscono le coordinate del centro A del sistema di vettori applicati rispetto al riferimento assunto.

Ricordando che quantità come i prodotti  $x_i V_i$  (o  $y_i V_i$ ) prendono il nome di momenti statici (o momenti del 1° ordine) delle grandezze  $V_i$  rispetto ad un asse y (od x), le (A.4) possono essere rappresentate dal seguente enunciato che va sotto il nome di “**Teorema dei momenti statici**”:

*Il momento statico rispetto ad un asse della grandezza  $V = \sum_i V_i$ , applicata nel centro A del sistema, è uguale alla somma dei momenti statici delle grandezze componenti calcolati sempre rispetto allo stesso asse.*

È opportuno notare che il momento statico calcolato rispetto ad un asse baricentrico è nullo.

### A3 Estensione allo spazio del Teorema dei momenti statici



Quanto è stato finora illustrato si può generalizzare per un sistema di vettori paralleli ed equiversi applicati, ma non tutti appartenenti allo stesso piano.

Si tratta di comporre il vettore risultante del sistema piano con uno dei vettori non appartenenti al piano e determinare un nuovo risultante che, composto con un altro dei vettori non appartenenti al nuovo piano ecc..

Il procedimento sopra illustrato viene svolto per via analitica utilizzando le relazioni seguenti:

$$V = \sum_i V_i$$

$$Vx_A = \sum_i V_i x_i$$

$$Vy_A = \sum_i V_i y_i$$

$$Vz_A = \sum_i V_i z_i$$

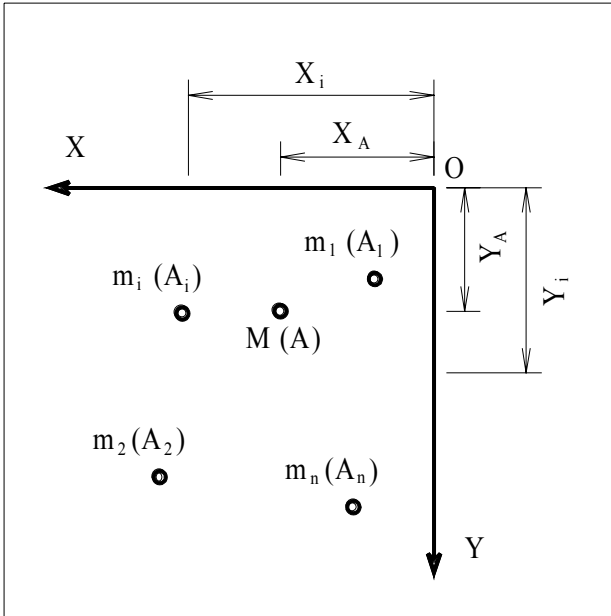
dalle quali è possibile ricavare le coordinate  $x_A$ ,  $y_A$  e  $z_A$  del centro del sistema complessivo.

Vale la pena di osservare che i vettori  $V_i$  possono rappresentare masse concentrate, masse elementari, elementi di linee, di superficie, di volume ecc..

I risultati sin qui ottenuti verranno utilizzati per determinare aree, centri delle aree di figure piane,

volumi e centro di volumi solidi, avendo cura, ove occorra, di sostituire il simbolo  $\int$  al simbolo  $\Sigma$

#### A4 Centro di un sistema di masse concentrate



Sia dato il sistema di n masse  $m_i$  concentrate nei punti  $A_i$  di un piano e rappresentato in figura. Si cerca il sistema equivalente costituito da una sola massa  $M$ :

$$M = \sum_i m_i$$

applicata nel punto A:

$$A(x_A, y_A)$$

In base al teorema dei momenti statici possiamo scrivere le relazioni:

$$Mx_A = \sum_i m_i x_i$$

$$My_A = \sum_i m_i y_i$$

che permettono di calcolare le coordinate del centro A del sistema:

$$x_A = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_A = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

Nel caso in cui il sistema sia tridimensionale si avrà:

$$Mx_A = \sum_i m_i x_i$$

$$My_A = \sum_i m_i y_i$$

$$Mz_A = \sum_i m_i z_i$$

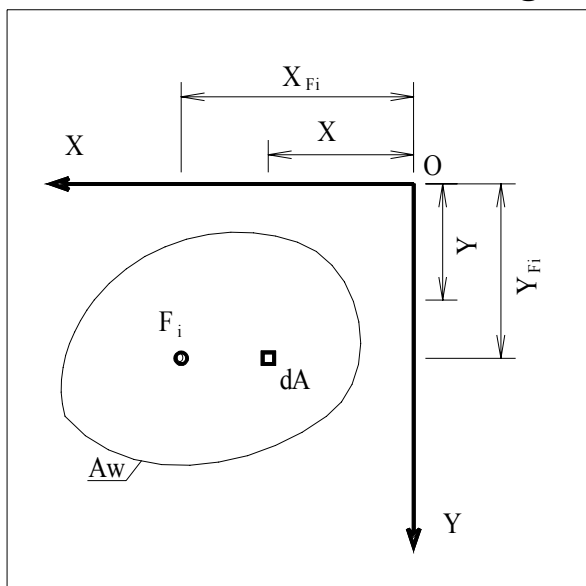
mentre le coordinate del centro del sistema saranno date dalle espressioni:

$$x_A = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_A = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

$$z_A = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

**A5 Area e centro  $F_i$  di una figura piana  $A_w$**



In questo caso nell'applicare il teorema dei momenti statici avremo le seguenti corrispondenze rispetto al caso del paragrafo precedente:

$$m_i \rightarrow dA$$

$$M \rightarrow A_w$$

$$\sum_i \rightarrow \int_{A_w}$$

La misura dell'area sarà data dalla relazione:

$$A_w = \int_{A_w} dA = \int_{A_w} dx dy$$

Le coordinate del centro  $F_i$  della figura piana vengono determinate sempre con l'ausilio del Teorema dei momenti statici che viene applicato nella forma integrale:

$$A_w x_{Fi} = \int_{A_w} x dA = S_y$$

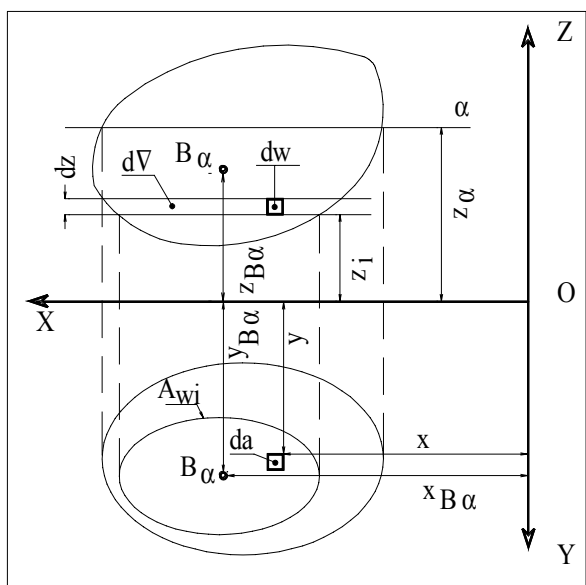
$$A_w y_{Fi} = \int_{A_w} y dA = S_x$$

Si potrà quindi scrivere:

$$x_{Fi} = \frac{\int_{A_w} x dA}{\int_{A_w} dA} = \frac{S_y}{A_w}$$

$$y_{Fi} = \frac{\int_{A_w} y dA}{\int_{A_w} dA} = \frac{S_x}{A_w}$$

**A6 Volume e coordinate del centro B di un solido qualsiasi**



In questo caso nell'applicare il teorema dei momenti statici avremo le seguenti corrispondenze rispetto al caso del paragrafo 1.4:

$$m_i \rightarrow dw$$

$$M \rightarrow \nabla_\alpha$$

$$\sum_i \rightarrow \int_{\nabla_\alpha}$$

Il volume del solido fino al piano  $\alpha$  è uguale alla somma (integrale) di tutti i volumi elementari  $dV$ . Ponendo come di consueto  $dw = dx dy dz$  si ottiene:

$$\nabla = \int_{\nabla} dw = \int_{\nabla} dx dy dz$$

Il volume infinitesimo  $dV$  può essere espresso nella forma:

$$dV = \int_{A_w} dw = dz \int_{A_w} dA$$

consentendo di esprimere il volume  $V_\alpha$  nella forma seguente:

$$V_\alpha = \int_{z_0}^{z_\alpha} dV = \int_{z_0}^{z_\alpha} dz \int_{A_w} dA = \int_{z_0}^{z_\alpha} A_w(z) dz$$

Per determinare le coordinate del centro  $B_\alpha$  del volume  $V_\alpha$  consideriamo i momenti statici  $dM_{yz}$ ,  $dM_{xz}$ , e  $dM_{xy}$  del volume infinitesimo  $dw$  rispetto ai piani coordinati  $yOz$ ,  $xOz$  ed  $xOy$ ; essi valgono rispettivamente:

$$dM_{yz} = xdw$$

$$dM_{xz} = ydw$$

$$dM_{xy} = zdw$$

Applicando il teorema dei momenti statici per ciascuna delle precedenti relazioni si ottiene:

$$x_{B_\alpha} V_\alpha = \int_{V_\alpha} dM_{yz} = \int_{V_\alpha} xdw$$

$$y_{B_\alpha} V_\alpha = \int_{V_\alpha} dM_{xz} = \int_{V_\alpha} ydw$$

$$z_{B_\alpha} V_\alpha = \int_{V_\alpha} dM_{xy} = \int_{V_\alpha} zdw$$

dalle quali si ricavano le coordinate  $x_{B_\alpha}$ ,  $y_{B_\alpha}$ ,  $z_{B_\alpha}$ :

$$x_{B_\alpha} = \frac{\int_{V_\alpha} xdw}{V_\alpha}$$

$$y_{B_\alpha} = \frac{\int_{V_\alpha} ydw}{V_\alpha}$$

$$z_{B_\alpha} = \frac{\int_{V_\alpha} zdw}{V_\alpha}$$

## **A7 Compendio delle formule per aree, volumi e coordinate dei loro centri**

A questo punto è opportuno riepilogare le espressioni ricavate fino a questo punto.

Per la figura piana  $A_w(z_i)$  si ha;

area:

$$A_w(z_i) = \int_{A_w} dA = \int_{A_w} dx dy \tag{A.6}$$

momenti statici:

$$\begin{aligned} S_y(z_i) &= \int_{A_w} x dA = \int_{A_w} x dx dy \\ S_x(z_i) &= \int_{A_w} y dA = \int_{A_w} y dx dy \end{aligned} \tag{A.7}$$

coordinate del centro  $F(z_i)$  dell'area  $A_w(z_i)$ :

$$\begin{aligned}x_F(z_i) &= \frac{S_y(z_i)}{A_w(z_i)} \\y_F(z_i) &= \frac{S_x(z_i)}{A_w(z_i)}\end{aligned}\tag{A.8}$$

Per il volume  $\nabla(z_\alpha)$  ottenuto intersecando un solido con un piano  $\alpha$  posto a quota  $z_\alpha$  si ha:

volume:

$$\nabla(z_\alpha) = \int_{\nabla_\alpha} dw = \int_{\nabla_\alpha} dx dy dz = \int_{z_0}^{z_\alpha} d\nabla = \int_{z_0}^{z_\alpha} dz \int_{A_w} dx dy = \int_{z_0}^{z_\alpha} A_w(z) dz\tag{A.9}$$

momenti statici:

$$\begin{aligned}M_{yz}(z_\alpha) &= \int_{\nabla_\alpha} x dw = \int_{\nabla_\alpha} x dx dy dz = \int_{z_0}^{z_\alpha} dz \int_{A_w} x dx dy = \int_{z_0}^{z_\alpha} S_y(z) dz \\M_{xz}(z_\alpha) &= \int_{\nabla_\alpha} y dw = \int_{\nabla_\alpha} y dx dy dz = \int_{z_0}^{z_\alpha} dz \int_{A_w} y dx dy = \int_{z_0}^{z_\alpha} S_x(z) dz \\M_{xy}(z_\alpha) &= \int_{\nabla_\alpha} z dw = \int_{\nabla_\alpha} z dx dy dz = \int_{z_0}^{z_\alpha} z dz \int_{A_w} dx dy = \int_{z_0}^{z_\alpha} z A_w(z) dz\end{aligned}\tag{A.10}$$

coordinate del centro  $B(z_\alpha)$  del volume  $\nabla(z_\alpha)$ :

$$\begin{aligned}x_B(z_\alpha) &= \frac{M_{yz}(z_\alpha)}{\nabla_\alpha(z_\alpha)} = \frac{\int_{z_0}^{z_\alpha} S_y(z) dz}{\int_{z_0}^{z_\alpha} A_w(z) dz} \\y_B(z_\alpha) &= \frac{M_{xz}(z_\alpha)}{\nabla_\alpha(z_\alpha)} = \frac{\int_{z_0}^{z_\alpha} S_x(z) dz}{\int_{z_0}^{z_\alpha} A_w(z) dz} \\z_B(z_\alpha) &= \frac{M_{xy}(z_\alpha)}{\nabla_\alpha(z_\alpha)} = \frac{\int_{z_0}^{z_\alpha} z A_w(z) dz}{\int_{z_0}^{z_\alpha} A_w(z) dz}\end{aligned}\tag{A.11}$$

Si noti che nessuna delle formule sopra elencate è ancora risolvibile in quanto sono presenti ancora integrali di superficie sia nelle formule concernenti le grandezze relative ad aree sia in quelle concernenti grandezze relative a volumi. In queste ultime gli integrali di volume sono stati trasformati in integrali semplici definiti di funzioni integrande che rappresentano ancora integrali di superficie.

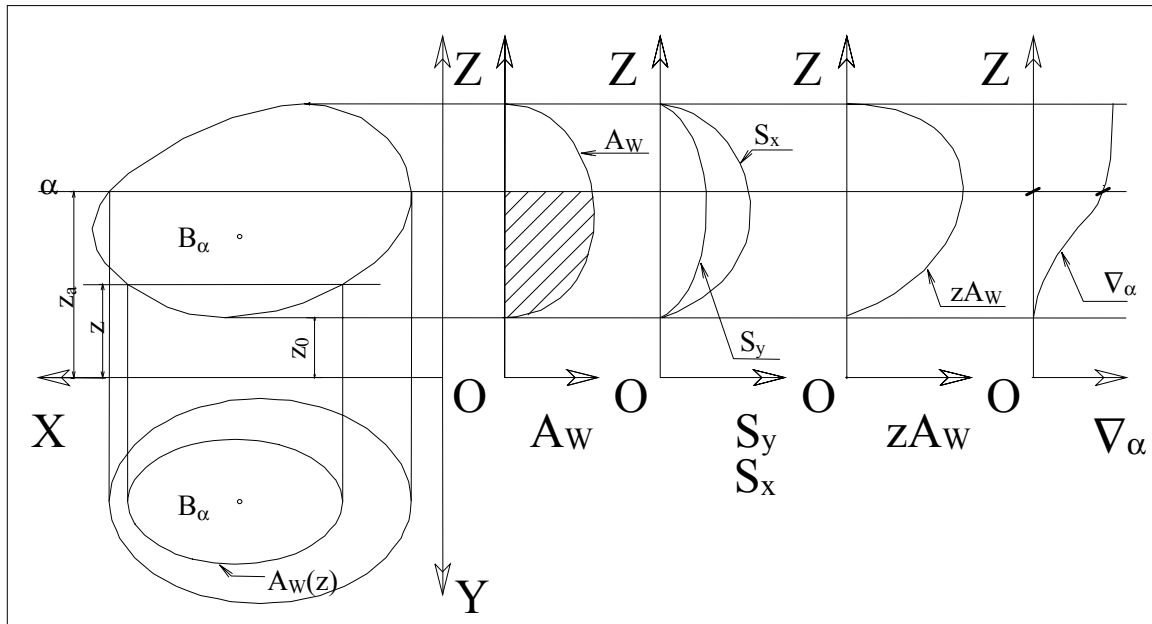
## A8 Osservazioni sulle relazioni tra le grandezze.

Per il solido dato si immagini di poter calcolare, come verrà illustrato successivamente, i valori delle singole funzioni integrande (integrali di superficie) che compaiono negli integrali semplici definiti delle formule del paragrafo precedente.

Si immagini inoltre di poterne tracciare i grafici in funzione dell'altezza  $z$  del piano che interseca il solido.

Si ricorda che il valore degli integrali semplici definiti si ottiene calcolando l'area sottesa dalla funzione integranda.

Nella figura seguente sono riportati in grafico i valori assunti, al variare della quota  $z_\alpha$  del piano  $\alpha$ , da alcune delle grandezze fin qui calcolate.



A titolo di esempio vale la pena osservare che il volume del solido compreso al di sotto del piano  $\alpha$ , che indicheremo con  $\nabla(z_\alpha)$ , e rappresentato sul grafico di  $\nabla_\alpha$  dal segmento evidenziato, si calcola con la formula:

$$\nabla_\alpha(z_\alpha) = \int_{z_0}^{z_\alpha} A_w(z) dz$$

ed equivale all'area ombreggiata sottesa dal diagramma della funzione integranda  $A_w(z)$  tra gli estremi di integrazione. Il diagramma di  $A_w$  in funzione di  $z$  è sempre contenuto nel primo quadrante in quanto, al più, l'area può essere nulla come illustrato in figura nei due casi in cui il piano  $\alpha$  risulta tangente al solido in un punto. Nel caso in cui il solido presentasse una o due superfici parallele al piano  $\alpha$  (ad esempio le superfici inferiore e/o superiore) il diagramma di  $A_w$  inizierebbe e/o finirebbe con un valore diverso da zero.

I diagrammi di  $S_x$  e di  $S_y$  possono assumere valori sia positivi sia negativi in quanto il segno delle distanze  $x$  ed  $y$  dipende dalla posizione relativa tra il solido e l'origine del sistema di riferimento rispetto al quale si sono calcolati i momenti statici.

Per quanto riguarda l'andamento del diagramma di  $\nabla_\alpha$ , poiché:

$$\nabla(z_\alpha) = \int_{z_0}^{z_\alpha} A_w(z) dz$$

si può scrivere:

$$\frac{d\nabla(z)}{dz} = A_w(z)$$

Per quei valori di  $z$  ove si verificasse  $A_w(z) = 0$  la curva  $\nabla(z)$  avrebbe tangente parallela all'asse  $z$ . Inoltre, dal momento che in base all'equazione precedente si ha:

$$\frac{dA_w(z)}{dz} = \frac{d^2\nabla(z)}{dz^2}$$

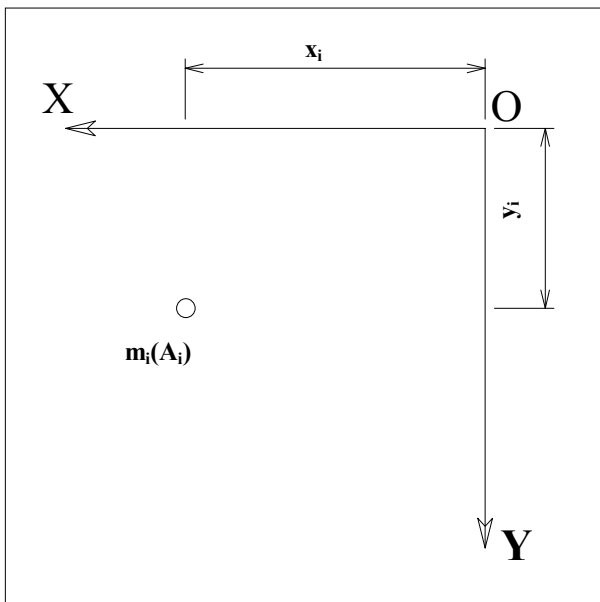
la tangente alla curva  $A_w(z)$  rappresenta la derivata seconda della curva  $\nabla(z)$ . Per cui ove la tangente alla curva  $A_w(z)$  risultasse parallela all'asse  $z$  si avrebbe un valore nullo per la derivata seconda della funzione  $\nabla(z)$  ed essa presenterebbe un flesso come illustrato nella figura.

Sulla base delle osservazioni illustrate in questo paragrafo si può operare un controllo sull'andamento delle grandezze ricavate per accertarsi di non avere commesso grossolani errori di calcolo

## B Momenti del 2° ordine

### B1 Momenti del 2° ordine per un sistema di masse concentrate

Si consideri il sistema piano di masse  $m_i$  applicate nei punti  $A_i$  rappresentato in figura.



Si definisce momento d'inerzia della massa  $m_i$  rispetto ad un asse il prodotto della massa per la sua distanza dall'asse elevata al quadrato.

Si definisce prodotto d'inerzia (o momento centrifugo rispetto agli assi  $xy$ ) della massa  $m_i$  rispetto ad una coppia di assi il prodotto della massa per le sue distanze dagli assi.

I momenti d'inerzia vengono solitamente indicati dalla lettera  $I$  portante a pedice la lettera che contraddistingue l'asse rispetto al quale il momento viene calcolato. Questa convenzione si applica anche al prodotto d'inerzia che però ha un doppio pedice in quanto calcolato rispetto ad una coppia di assi.

Per il sistema in esame si avrà:

$$I_X = \sum_i m_i y_i^2 \quad [ > 0 ]$$

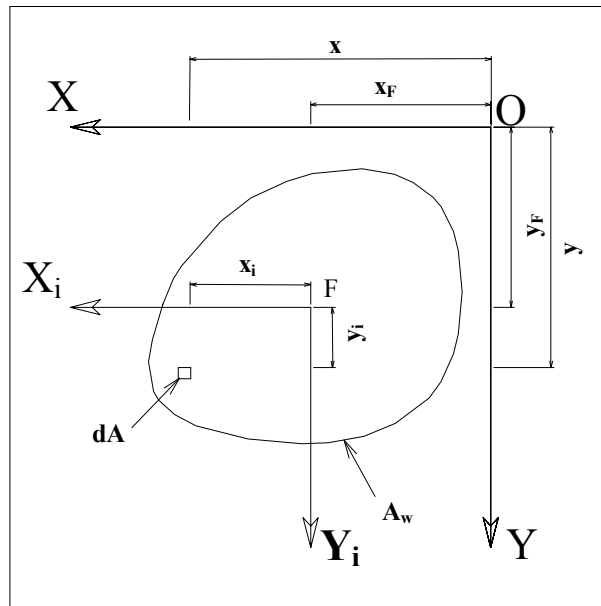
$$I_Y = \sum_i m_i x_i^2 \quad [ > 0 ]$$

$$I_{XY} = \sum_i m_i x_i y_i \quad [ < = > 0 ]$$

Si ritiene opportuno sottolineare che i momenti d'inerzia assumono sempre valore positivo, mentre il prodotto d'inerzia può assumere valori positivi, negativi o nulli in conseguenza della posizione relativa del sistema e della coppia di assi cartesiani di riferimento.

### B2 Momenti del 2° ordine per una figura piana

Sia data la figura piana rappresentata in figura.



Con riferimento all'elemento infinitesimo di area  $da$  e sulla base delle definizioni del paragrafo precedente si può scrivere:

$$\begin{aligned} dI_x &= y^2 dA \\ dI_y &= x^2 dA \\ dI_{xy} &= xy dA \end{aligned} \quad (B.1)$$

Per quanto riguarda l'intera figura  $A_w$  si ha:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{A_w} y^2 dA \\ I_y &= \int_{A_w} x^2 dA \\ I_{xy} &= \int_{A_w} xy dA \end{aligned} \quad (B.2)$$

La coppia di assi cartesiani di riferimento può essere scelta arbitrariamente. Consideriamo quindi una nuova coppia di assi cartesiani  $x_i$  ed  $y_i$ , paralleli ai precedenti, avente origine nel centro  $F$  della figura  $A_w$ . Qualunque coppia di assi cartesiani aventi origine nel centro di una figura viene definita una coppia di *assi centrali d'inerzia*

Rispetto alla nuova coppia di assi le (B.1) divengono:

$$\begin{aligned} dI_{x_i} &= y_i^2 dA \\ dI_{y_i} &= x_i^2 dA \\ dI_{x_i y_i} &= x_i y_i dA \end{aligned} \quad (B.3)$$

mentre le (B.2) si trasformano nelle:

$$\begin{aligned}
 I_{x_i} &= \int_{A_W} y_i^2 dA \\
 I_{y_i} &= \int_{A_W} x_i^2 dA \\
 I_{x_i y_i} &= \int_{A_W} x_i y_i dA
 \end{aligned}
 \tag{B.4}$$

### B3 Teorema del trasporto o di Huyghens

Evidentemente poiché tra i due sistemi di coordinate appena utilizzati esiste un legame espresso dalle:

$$\begin{aligned}
 x_i &= x - x_F \\
 y_i &= y - y_F
 \end{aligned}$$

le (B.4) potranno essere riscritte sostituendo ad  $x_i$  ed  $y_i$  le quantità ottenute dalle relazioni precedenti. Ad esempio la prima delle (B.4) diverrà:

$$I_{x_i} = \int_{A_W} y_i^2 dA = \int_{A_W} (y - y_F)^2 dA$$

Sviluppando il quadrato del binomio che costituisce la funzione integranda ed applicando le proprietà degli integrali si ottiene:

$$I_{x_i} = \int_{A_W} y^2 dA - 2y_F \int_{A_W} y dA + y_F^2 \int_{A_W} dA$$

Quest'ultima relazione, tenendo conto delle (A.6), delle (A.7) e delle (B.2) può essere riscritta nella forma:

$$I_{x_i} = I_x - 2y_F S_x + A_W y_F^2$$

Facendo uso delle (A.8) l'espressione precedente diviene:

$$I_{x_i} = I_x - 2y_F A_W y_F + A_W y_F^2$$

che assume la seguente forma finale:

$$I_{x_i} = I_x - A_W y_F^2$$

Il procedimento può essere ripetuto per le altre relazioni (B.4), dando luogo alle relazioni:

$$\begin{aligned}
 I_{x_i} &= I_x - A_W y_F^2 \\
 I_{y_i} &= I_y - A_W x_F^2 \\
 I_{x_i y_i} &= I_{xy} - A_W x_F y_F
 \end{aligned}
 \tag{B.5}$$

In maniera del tutto analoga si possono riscrivere le (B.2) tenendo conto che:

$$\begin{aligned}
 x &= x_F + x_i \\
 y &= y_F + y_i
 \end{aligned}$$

ottenendo ad esempio:

$$I_x = \int_{A_W} y^2 da = \int_{A_W} (y_F + y_i)^2 dA$$

Sviluppando il quadrato del binomio che costituisce la funzione integranda ed applicando le proprietà degli integrali si ottiene:

$$I_x = \int_{A_W} y_i^2 dA + 2y_F \int_{A_W} y_i dA + y_F^2 \int_{A_W} dA$$

che può essere riscritta nella forma:

$$I_x = I_{x_i} + 2y_F S_x + A_W y_F^2$$

Ricordando che i momenti statici di un sistema calcolati rispetto ad assi centrali d'inerzia sono nulli si ha  $S_x = 0$  e pertanto si ottiene:

$$I_x = I_{x_i} + A_W y_F^2$$

Il procedimento può essere ripetuto per le altre relazioni (B.2) ottenendo:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_i} + A_W y_F^2 \\ I_y &= I_{y_i} + A_W x_F^2 \\ I_{xy} &= I_{x_i y_i} + A_W x_F y_F \end{aligned} \tag{B.6}$$

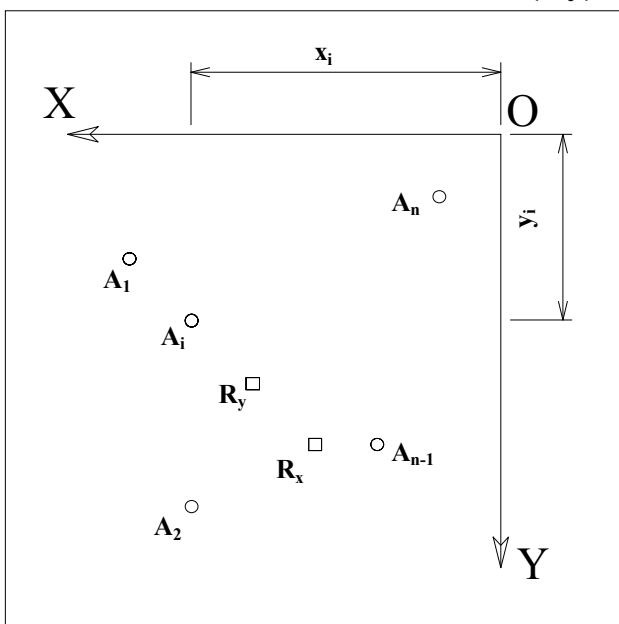
Quanto emerso nel corso del presente paragrafo può essere riassunto dal seguente **“Teorema di Huyghens”**:

*Il momento d'inerzia di una figura piana rispetto ad un qualunque asse x giacente nel suo piano, è eguale al momento d'inerzia rispetto all'asse centrale d'inerzia parallelo a quello dato, aumentato del prodotto dell'area della figura per il quadrato della distanza tra i due assi.*

Un importante corollario del teorema di Huyghens è il seguente:

*Tra tutti i momenti d'inerzia di una figura, calcolati rispetto ad un fascio di assi paralleli, il minimo risulta quello calcolato rispetto all'asse centrale d'inerzia.*

**B4 Centro relativo all'asse x (o y) di un sistema di masse concentrate.**



Si consideri il sistema di masse concentrate  $m_i$  applicate nei punti  $A_i$

Si definisce centro relativo ad una retta il centro del sistema di vettori, applicati nei punti  $A_i$ , che rappresentano i momenti statici degli elementi componenti il sistema calcolati rispetto alla retta data.

Considerando ad esempio l'asse X è possibile associare un vettore  $S_{x_i}$  al momento statico  $m_i y_i$  di ciascuna delle masse concentrate calcolato rispetto all'asse X.

Applicando il teorema dei momenti statici al nuovo sistema di vettori  $S_{x_i}$ , applicati nei punti  $A_i$ , è possibile ottenere le coordinate del suo centro  $R_x$  che è appunto il centro relativo

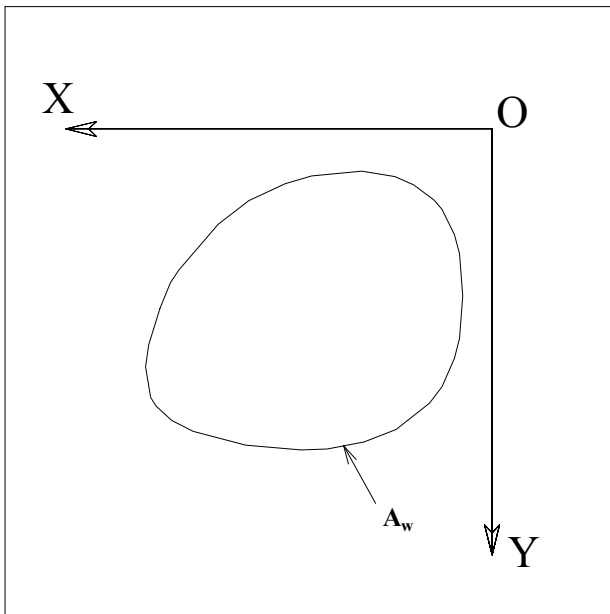
all'asse X del sistema di masse  $m_i$ :

$$\mathbf{R}_x \begin{cases} x_{R_x} = \frac{\sum_i S_{xi} x_i}{\sum_i S_{xi}} = \frac{\sum_i m_i y_i x_i}{\sum_i m_i y_i} = \frac{I_{xy}}{S_x} \\ y_{R_x} = \frac{\sum_i S_{xi} y_i}{\sum_i S_{xi}} = \frac{\sum_i m_i y_i y_i}{\sum_i m_i y_i} = \frac{\sum_i m_i y_i^2}{\sum_i m_i y_i} = \frac{I_x}{S_x} \end{cases}$$

Operando in maniera analoga è possibile ottenere le coordinate di  $\mathbf{R}_y$ , centro relativo all'asse Y:

$$\mathbf{R}_y \begin{cases} x_{R_y} = \frac{\sum_i S_{yi} x_i}{\sum_i S_{yi}} = \frac{\sum_i m_i x_i x_i}{\sum_i m_i x_i} = \frac{\sum_i m_i x_i^2}{\sum_i m_i x_i} = \frac{I_y}{S_y} \\ y_{R_y} = \frac{\sum_i S_{yi} y_i}{\sum_i S_{yi}} = \frac{\sum_i m_i x_i y_i}{\sum_i m_i x_i} = \frac{I_{xy}}{S_y} \end{cases}$$

**B5 Centro relativo all'asse x (o y) di una figura piana.**



Quanto esposto nel paragrafo precedente può essere esteso ad una figura piana sostituendo il simbolo  $\int_{A_w}$  al simbolo  $\sum_i$ .

Omettendo, per brevità, i passaggi matematici si perviene al risultato seguente:

$$\mathbf{R}_x \begin{cases} x_{R_x} = \frac{I_{xy}}{S_x} \\ y_{R_x} = \frac{I_x}{S_x} \end{cases} \qquad \mathbf{R}_y \begin{cases} x_{R_y} = \frac{I_y}{S_y} \\ y_{R_y} = \frac{I_{xy}}{S_y} \end{cases}$$

**B6 Raggio d'inerzia di un sistema piano**

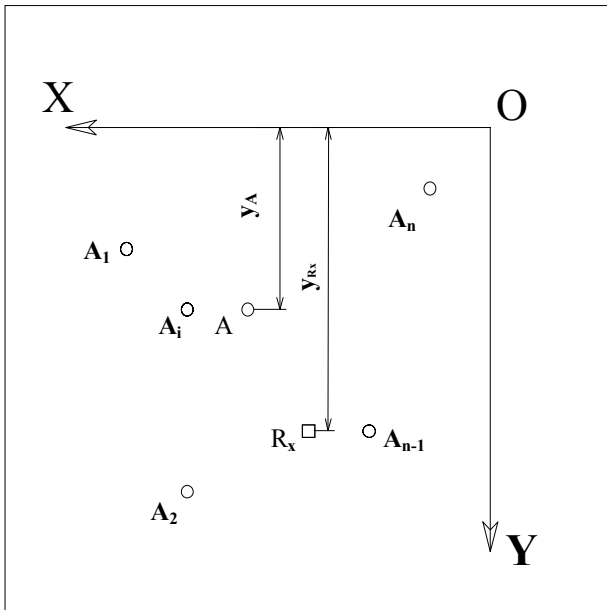
Considerando ad esempio il sistema piano di masse rappresentato nella figura seguente si definisce raggio d'inerzia del sistema rispetto all'asse X la grandezza:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$$

La relazione sopra riportata può essere riscritta elevando entrambi i membri al quadrato in modo da evidenziare una importante proprietà del raggio d'inerzia; si può scrivere dunque:

$$I_x = \rho_x^2 M$$

che esprime la seguente proprietà del raggio d'inerzia: *il momento d'inerzia di un sistema piano di masse, calcolato rispetto ad una retta x è eguale al prodotto del quadrato del corrispondente raggio d'inerzia per la massa risultante del sistema.*



Ricordando la definizione della distanza dall'asse X del centro relativo del sistema rispetto all'asse X

$$y_{R_x} = \frac{I_x}{S_x}$$

e le relazioni

$$I_x = \rho_x^2 M$$

$$S_x = y_A M$$

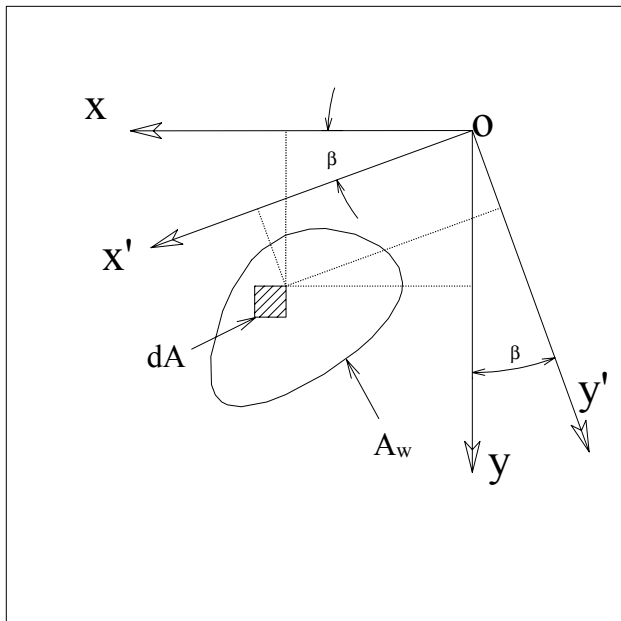
si può scrivere:

$$y_{R_x} = \frac{\rho_x^2}{y_A} \quad \text{ed anche} \quad y_{R_x} : \rho_x = \rho_x : y_A$$

ottenendo una seconda importante proprietà del raggio d'inerzia ovvero: *il raggio d'inerzia rispetto ad una retta è medio proporzionale tra le distanze dalla retta del centro del sistema e del centro relativo alla retta.*

Per la figura piana sussistono ovviamente relazioni analoghe

## B7 Assi principali d'inerzia



Vediamo ora come variano i momenti del 2° ordine al variare della giacitura degli assi di riferimento.

Con riferimento alla figura le coordinate di dA rispetto agli assi x' e y' risultano:

$$\begin{cases} x' = x \cos \beta + y \sin \beta \\ y' = y \cos \beta - x \sin \beta \end{cases}$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse x' è dato dalla relazione:

$$I_{x'} = \int_{A_w} y'^2 dA$$

la quale, sostituendo ad y' il valore fornito dalle relazioni tra le coordinate appena scritte, assume la forma seguente:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_{A_w} (y \cos \beta - x \sin \beta)^2 dA \\ &= \cos^2 \beta \int_{A_w} y^2 dA - \sin 2\beta \int_{A_w} xy dA + \sin^2 \beta \int_{A_w} x^2 dA \end{aligned}$$

dalla quale si ricava:

$$I_{x'} = I_x \cos^2 \beta - I_{xy} \sin 2\beta + I_y \sin^2 \beta$$

Con procedimento analogo si possono calcolare gli altri due momenti. Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_x \cos^2 \beta - I_{xy} \sin 2\beta + I_y \sin^2 \beta \\ I_{y'} &= I_x \sin^2 \beta + I_{xy} \sin 2\beta + I_y \cos^2 \beta \\ I_{x'y'} &= \frac{1}{2} [I_x - I_y] \sin 2\beta + I_{xy} \cos 2\beta \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Ottenute le leggi di variazione dei momenti del 2° ordine in funzione dell'angolo  $\beta$  è interessante cercare l'angolo  $\beta$  per il quale le grandezze  $I_{x'}$  ed  $I_{y'}$  sono minime o massime. Consideriamo a questo scopo la funzione  $I_{x'} = I_{x'}(\beta)$  e calcoliamone la derivata rispetto a  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \frac{dI_{x'}}{d\beta} &= -2I_x \sin \beta \cos \beta - 2I_{xy} \cos 2\beta + 2I_y \sin \beta \cos \beta \\ &= (I_y - I_x) \sin 2\beta - 2I_{xy} \cos 2\beta \end{aligned}$$

Per trovare per quale  $\beta$  si ha un estremo relativo della funzione (massimo o minimo) è necessario imporre l'annullarsi della derivata prima della funzione stessa, si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} (I_y - I_x) \sin 2\beta - 2I_{xy} \cos 2\beta &= 0 \\ (I_y - I_x) \sin 2\beta &= 2I_{xy} \cos 2\beta \end{aligned}$$

Il valore cercato  $\beta^*$  può quindi essere ricavato dalla relazione:

$$\operatorname{tg} 2\beta^* = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (\text{B.8})$$

Per stabilire se l'estremo relativo sia un massimo od un minimo come è noto sarebbe necessario ricorrere alla derivata seconda della funzione.

In corrispondenza dell'angolo  $\beta^*$  il prodotto d'inerzia risulta nullo.

*Una coppia di assi cartesiani per cui i due momenti d'inerzia risultano rispettivamente massimo e minimo ed il prodotto d'inerzia nullo viene definita coppia di assi principali d'inerzia.*

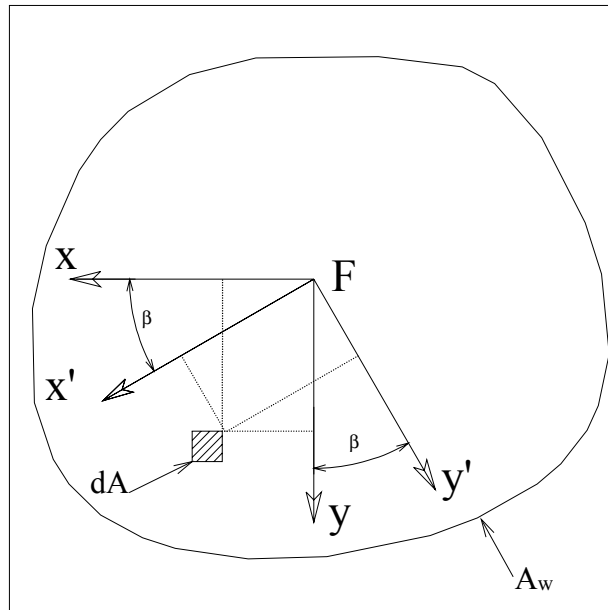
L'angolo  $\beta^*$  individua quindi la giacitura degli assi principali d'inerzia della figura a partire dagli assi dati.

## B8 Assi principali centrali d'inerzia

Non essendo stata fatta alcuna ipotesi per la coppia di assi di partenza, la trattazione del paragrafo precedente ha valore del tutto generale.

Essa può quindi essere applicata anche nel caso in cui la coppia di assi cartesiani di partenza sia una coppia di assi centrali d'inerzia, avente quindi origine nel centro F della figura  $A_w$ .

Con riferimento alla figura seguente sarà quindi possibile ricavare l'angolo  $\beta^*$  che gli assi principali d'inerzia formano con gli assi centrali di partenza.



Questa coppia di assi principali d'inerzia ha la particolarità di passare anche per il centro F della figura. Questi assi vengono quindi denominati assi principali centrali d'inerzia, e saranno indicati con  $x_1$  ed  $y_1$ .

Ovviamente anche gli assi principali centrali d'inerzia godono della proprietà degli assi principali, quindi si avrà  $I_{x_1 y_1} = 0$ .

Ovviamente anche nel caso di assi centrali d'inerzia valgono le relazioni (B.7) e (B.8), pertanto i valori di  $I_{x_1}$  e di  $I_{y_1}$  possono essere ricavati in base a  $I_x$ ,  $I_y$  ed  $I_{xy}$  ponendo  $\beta = \beta^*$ . Per quanto riguarda  $I_{x_1 y_1}$  il suo valore è nullo.

La prima delle (B.7), applicata al caso in esame, fornisce:

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \beta^* - I_{xy} \sin 2\beta^* + I_y \sin^2 \beta^*$$

Ricordando che:

$$\sin^2 \vartheta = \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} \qquad \cos^2 \vartheta = \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2}$$

la relazione precedente diviene:

$$I_{x_1} = I_x \frac{1 + \cos 2\beta^*}{2} - I_{xy} \sin 2\beta^* + I_y \frac{1 - \cos 2\beta^*}{2}$$

che, riordinata, si trasforma nella:

$$I_{x_1} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\beta^* - I_{xy} \sin 2\beta^*$$

Ricordando ancora che:

$$\sin \vartheta = \frac{\tan \vartheta}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta}} \qquad \cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta}}$$

si ricava l'espressione seguente:

$$I_{x_1} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\beta^*}} - I_{xy} \frac{\tan 2\beta^*}{\sqrt{1 + \tan^2 2\beta^*}}$$

Sostituendo ora al numeratore del terzo termine del secondo membro della relazione precedente il valore fornito dalla (B.8) ed invertendo il segno del secondo termine si ricava:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2} \frac{I_y - I_x}{\sqrt{1 + \tan^2 2\beta^*}} - \frac{I_{xy}}{\sqrt{1 + \tan^2 2\beta^*}} \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \\ &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2} \left( \frac{I_y - I_x}{\sqrt{1 + \tan^2 2\beta^*}} + \frac{4I_{xy}^2}{(I_y - I_x)\sqrt{1 + \tan^2 2\beta^*}} \right) \\ &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2} \left( \frac{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}{(I_y - I_x)\sqrt{1 + \tan^2 2\beta^*}} \right) \\ &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2]^2}{(I_y - I_x)^2 (1 + \tan^2 2\beta^*)}} \end{aligned}$$

a questo punto si utilizza ancora la relazione (B.8) ottenendo:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{[(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2]^2}}{\sqrt{(I_y - I_x)^2 \left(1 + \frac{4I_{xy}^2}{(I_y - I_x)^2}\right)}} \\ &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2]^2}{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}} \end{aligned}$$

che, semplificata, fornisce finalmente la relazione :

$$I_{x_1} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}$$

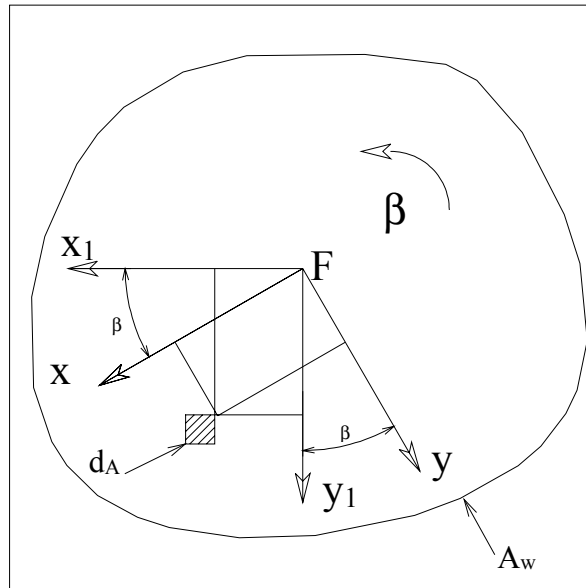
In maniera del tutto analoga si ricava la:

$$I_{y_1} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}$$

In conclusione si potrà scrivere:

$$\left. \begin{matrix} I_{x_1} \\ I_{y_1} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) \mp \frac{1}{2} \sqrt{(I_y - I_x)^2 + 4I_{xy}^2}$$

Una volta in possesso dei momenti di inerzia calcolati rispetto agli assi principali centrali d'inerzia è possibile ottenere i momenti d'inerzia rispetto ad una qualunque coppia di assi centrali in funzione dell'angolo  $\beta$ .



Con riferimento alla figura si può scrivere:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta \\ y = y_1 \cos \beta - x_1 \sin \beta \end{cases}$$

Dalla definizione di momento d'inerzia si ha:

$$I_x = \int_{A_w} y^2 dA$$

e, utilizzando le formule di rotazione degli assi, si ottiene:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{A_w} (y_1 \cos \beta - x_1 \sin \beta)^2 dA \\ &= \cos^2 \beta \int_{A_w} y_1^2 dA - \sin 2\beta \int_{A_w} x_1 y_1 dA + \sin^2 \beta \int_{A_w} x_1^2 dA \\ &= I_{x_1} \cos^2 \beta - I_{x_1 y_1} \sin 2\beta + I_{y_1} \sin^2 \beta \end{aligned}$$

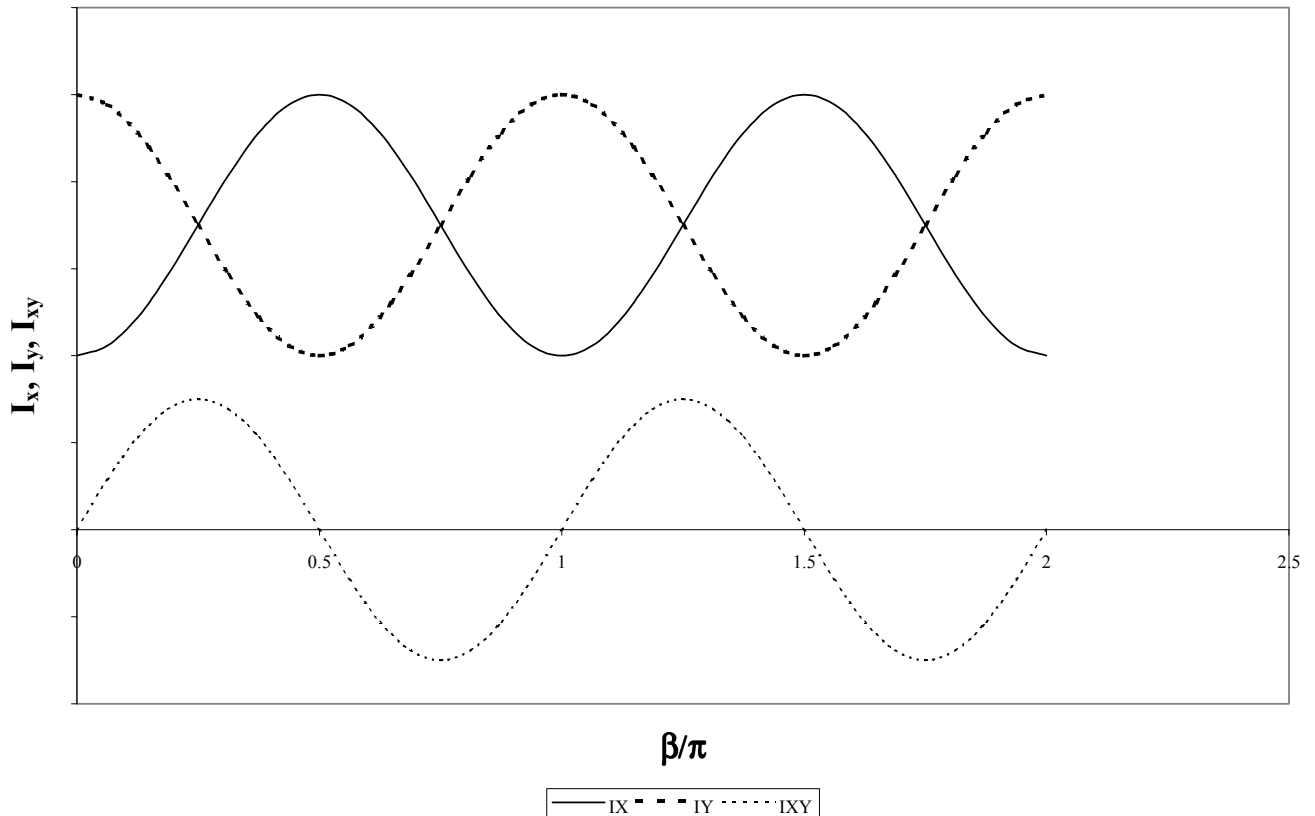
Ricordando però che la coppia di assi  $x_1 y_1$  è una coppia di assi principali centrali d'inerzia per la quale si ha  $I_{x_1 y_1} = 0$  potremo scrivere:

$$I_x = I_{x_1} \cos^2 \beta + I_{y_1} \sin^2 \beta$$

Ripetendo il procedimento per gli altri due momenti si ottiene infine:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_1} \cos^2 \beta + I_{y_1} \sin^2 \beta \\ I_y &= I_{x_1} \sin^2 \beta + I_{y_1} \cos^2 \beta \\ I_{xy} &= \frac{1}{2} [I_{x_1} - I_{y_1}] \sin 2\beta \end{aligned} \tag{B.9}$$

Con riferimento alla figura precedente ed utilizzando le relazioni (B.9) è possibile determinare l'andamento dei momenti del secondo ordine, calcolati rispetto ad una coppia di assi  $xy$  ruotata dell'angolo  $\beta$  rispetto agli assi principali centrali d'inerzia  $x_1 y_1$ , al variare dell'angolo  $\beta$ . Tale andamento è schematizzato nella figura seguente.



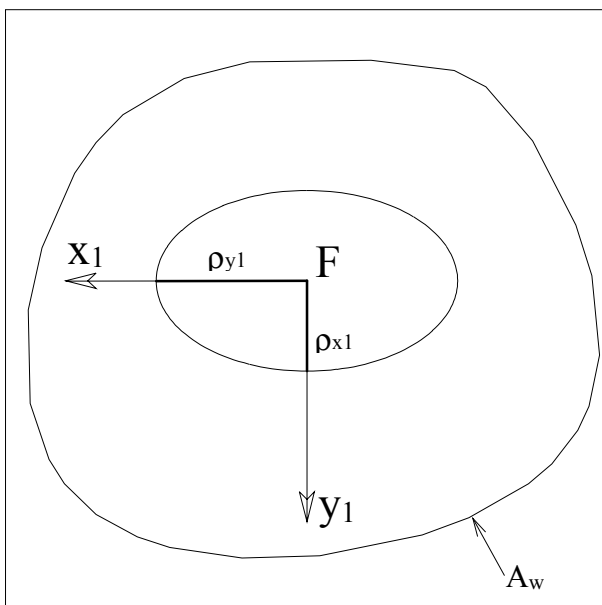
Si ricordi che  $x_1$  ed  $y_1$  sono assi principali centrali d'inerzia e che pertanto si ha  $I_{x_1}$  minimo,  $I_{y_1}$  massimo ed  $I_{x_1 y_1}$  nullo.

### B9 Ellisse centrale d'inerzia di una figura piana

Ricordando la definizione di raggio d'inerzia, la prima delle (B.9) può essere riscritta nella forma:

$$\begin{aligned} \rho_x^2 A_w &= \rho_{x_1}^2 A_w \cos^2 \beta + \rho_{y_1}^2 A_w \sin^2 \beta \\ \rho_x^2 &= \rho_{x_1}^2 \cos^2 \beta + \rho_{y_1}^2 \sin^2 \beta \end{aligned}$$

Ricordando che, per convenzione,  $I_{x_1}$  è il minimo dei momenti principali centrali d'inerzia si avrà  $\rho_{x_1} < \rho_{y_1}$ .



È possibile costruire un'ellisse che abbia come semiassi i due raggi d'inerzia

$$\rho_{x_1} = \sqrt{\frac{I_{x_1}}{A_w}} \quad \rho_{y_1} = \sqrt{\frac{I_{y_1}}{A_w}}$$

L'equazione dell'ellisse sarà dunque:

$$\frac{x_1^2}{\rho_{y_1}^2} + \frac{y_1^2}{\rho_{x_1}^2} = 1$$

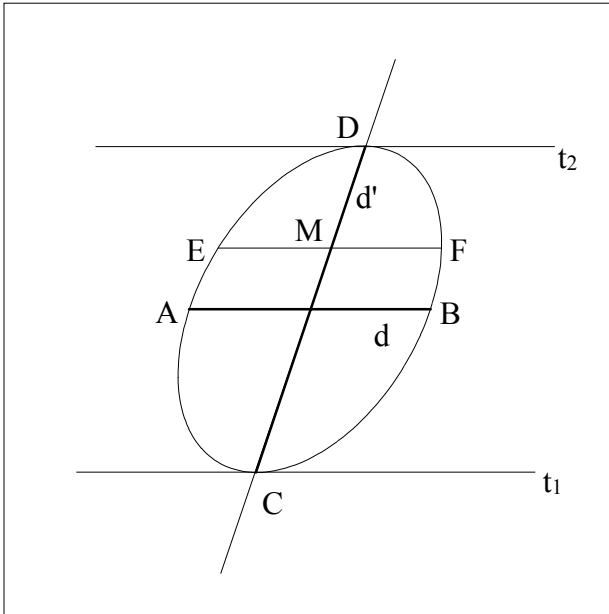
Questa ellisse prende il nome di *ellisse centrale d'inerzia* della figura piana.

Una importante proprietà dell'ellisse centrale d'inerzia è la seguente:

*Il raggio d'inerzia rispetto ad una retta baricentrica è dato dal semidiametro dell'ellisse ad essa coniugato.*

La ricerca del diametro coniugato può essere fatta in base alla seguente definizione:

“il diametro  $d'$  è coniugato di  $d$  rispetto all'ellisse se esso biseca tutte le corde parallele a  $d$ ”.



In conseguenza della definizione precedente di può anche dire che: “il diametro  $d'$  è coniugato di  $d$  rispetto all'ellisse se congiunge i punti di tangenza all'ellisse con due rette parallele a  $d$ .”

Nella figura sono illustrate le procedure per l'individuazione del diametro  $d'$  coniugato di  $d$ .

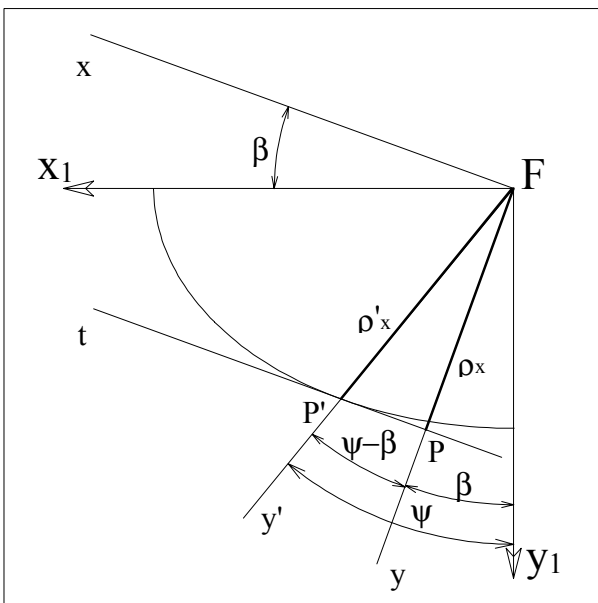
Infatti  $d'$  può essere individuato congiungendo il punto medio M della corda GH, parallela al diametro  $d \equiv AB$ , con il centro dell'ellisse F che, per definizione, biseca la corda AB che è anche un diametro dell'ellisse.

In alternativa  $d'$  può essere individuato congiungendo i punti C e D di tangenza con l'ellisse delle due parallele  $t_1$  e  $t_2$  al diametro  $d$ .

L'ellisse centrale d'inerzia può quindi essere definita come il diagramma polare della variazione del raggio d'inerzia della figura piana:

$$\rho'_x = \sqrt{\frac{I'_x}{A_w}}$$

rispetto ad un asse centrale  $x$  che ruoti attorno al centro della figura.



Nella figura il segmento  $FP'$ , giacente sulla retta  $y'$  coniugata della  $x$  rispetto all'ellisse, rappresenta il raggio d'inerzia  $\rho'_x$  della figura rispetto alla retta  $x$ ; si ha cioè:

$$I'_x = \rho'^2_x A_w$$

In questo caso, però, le distanze dall'asse  $x$  sono valutate secondo la direzione  $y'$ , coniugata di  $x$ , e non in direzione normale ad  $x$ . Risulta quindi:

$$I'_x = \int_{A_w} y'^2 da$$

Dalla geometria proiettiva si deduce che l'angolo  $\psi$  che la retta  $y'$ , coniugata della  $x$  rispetto all'ellisse, forma con la retta  $y \perp$  alla  $x$  è espresso dalla relazione seguente (vedi Appendice I):

$$\psi = \arctan\left(\frac{I_y}{I_x} \tan \beta\right)$$

Volendo ottenere:

$$I_x = \int_{A_w} y^2 dA$$

in cui le  $y$  sono valutate in direzione  $\perp$  ad  $x$  occorre utilizzare la relazione:

$$y = y' \cos(\psi - \beta)$$

che consente di scrivere:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{A_w} y'^2 \cos^2(\psi - \beta) dA \\ &= \cos^2(\psi - \beta) \int_{A_w} y'^2 dA \end{aligned}$$

dalla quale si ottiene infine:

$$I_x = I'_x \cos^2(\psi - \beta)$$

Esprimendo la relazione precedente in funzione dei raggi d'inerzia si otterrà:

$$\rho_x^2 A_w = \rho_x'^2 \cos^2(\psi - \beta) A_w$$

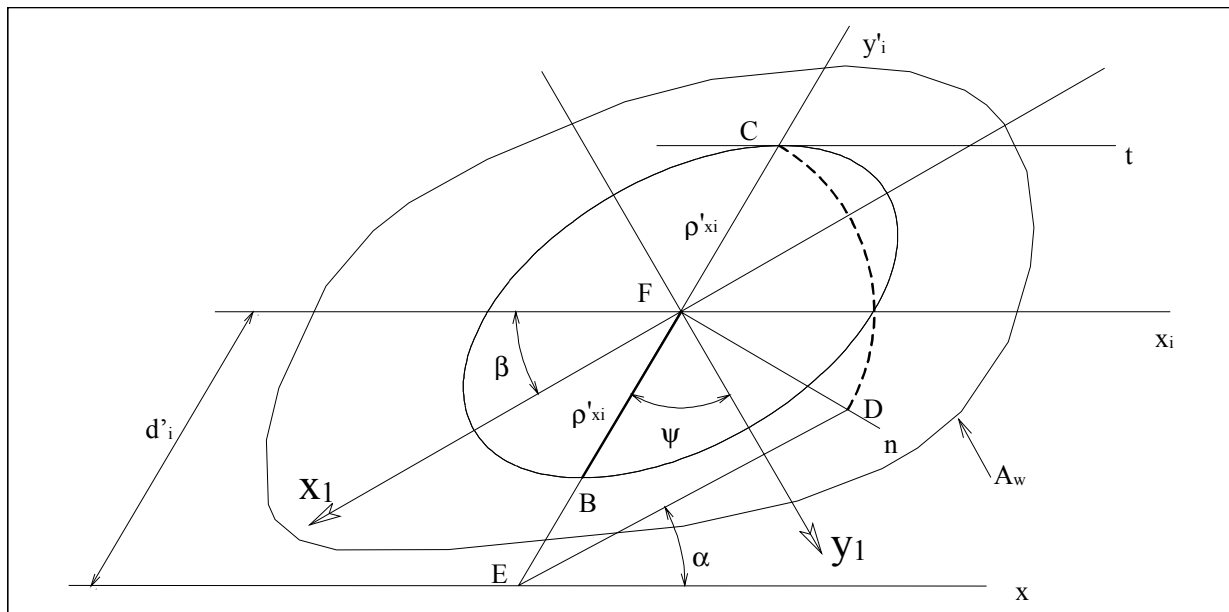
che fornisce:

$$\rho_x = \rho_x' \cos(\psi - \beta)$$

Sulla base di quest'ultima relazione si può ottenere il momento d'inerzia desiderato:

$$I_x = \rho_x'^2 \cos^2(\psi - \beta) A_w$$

Si illustra ora il procedimento per determinare il momento d'inerzia della figura  $A_w$  rispetto alla retta  $x$  essendo nota l'ellisse centrale d'inerzia.



Si tracciano, parallelamente ad  $x$ , la retta  $x_i$  per  $F$  e la retta  $t$  tangente all'ellisse. Individuato il punto  $C$  di tangenza per esso e per  $F$  si traccia la retta  $y'_i$  coniugata di  $x_i$  rispetto all'ellisse. In questa maniera il raggio d'inerzia  $\rho'_{xi}$  risulta determinato.

Come si è mostrato in precedenza il raggio d'inerzia  $\rho'_{xi}$  consente di valutare il momento d'inerzia

## Marco FERRANDO: Appunti del Corso Geometria dei Galleggianti 1

$I'_{xi}$ , calcolato misurando le distanze in direzione  $y'_i$ , dalla relazione:

$$I'_{xi} = \rho_{xi}^2 A_w$$

Il momento  $I'_x$  può essere ottenuto applicando, sempre in direzione  $y'_i$ , il teorema di Huyghens:

$$I'_x = I'_{xi} + A_w d_i^2$$

Dividendo la relazione precedente per  $A_w$  si ottiene:

$$\rho_x^2 = \rho_{xi}^2 + d_i^2$$

Se sulla normale  $n$  ad  $y'_i$  si riporta un segmento  $FD$  eguale a  $\rho_{xi}$  e si congiunge  $D$  con  $E$ , punto di intersezione di  $y'_i$  con  $x$ , si ottiene il triangolo rettangolo  $FED$ . Applicando il teorema di Pitagora si ottiene:

$$\overline{ED}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FD}^2$$

che, per come è stato costruito il triangolo, può essere riscritta nella forma:

$$\overline{ED}^2 = \rho_{xi}^2 + d_i^2$$

si può quindi concludere che:

$$\rho_x^2 = \overline{ED}^2$$

Volendo ottenere il momento d'inerzia rispetto ad  $x$  per distanze valutate normalmente all'asse  $x$  occorre proiettare sia  $\rho_{xi}$  sia  $d_i$  sulla normale ad  $x$ . Si ottiene:

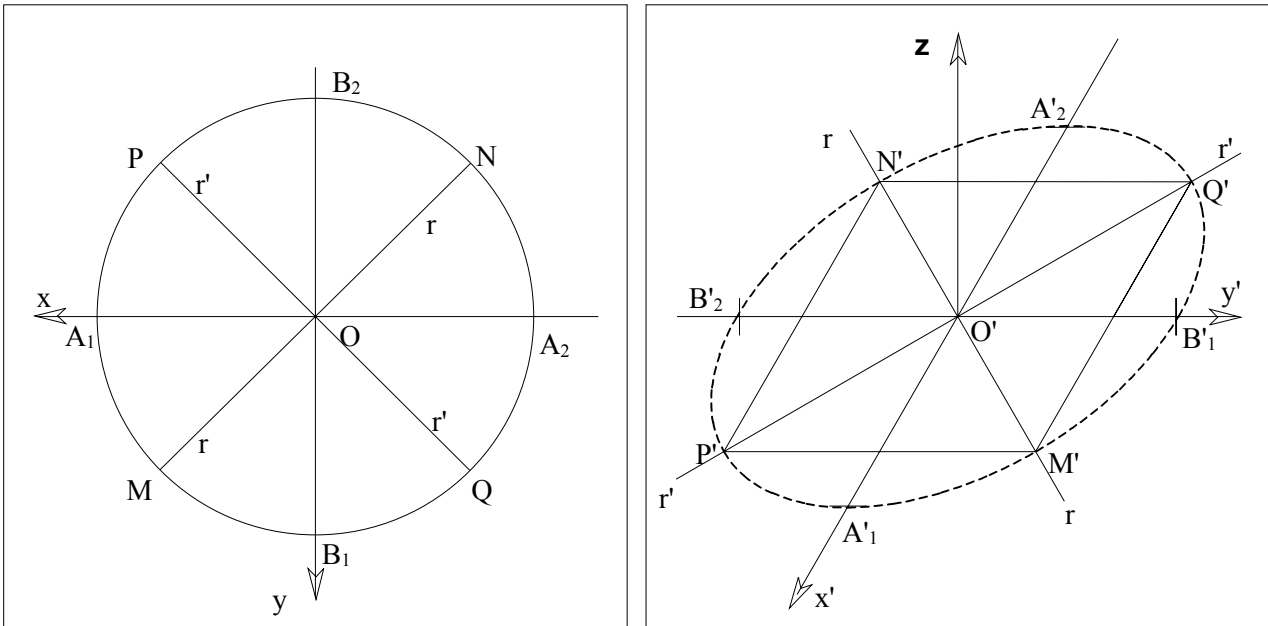
$$I_x = I'_x \cos^2(\psi - \beta)$$

e, tenendo conto che  $\alpha = 90^\circ - (\psi - \beta)$ , l'espressione precedente può essere riscritta nella forma:

$$I_x = I'_x \sin^2 \alpha$$

### B10 Appendice I – Direzioni coniugate rispetto ad un'ellisse

Considerato il cerchio sul piano  $xy$  delle proiezioni ortogonali avente centro nell'origine  $O$ , si vuol vedere come si corrispondono coppie di diametri tra loro perpendicolari, quando il cerchio, mediante operazioni di proiezione e/o sezione diviene un'ellisse. Un esempio di queste operazioni può essere la rappresentazione assonometrica del cerchio, ad esempio un'assonometria cavaliere.



Alla coppia di diametri del cerchio  $\overline{A_1A_2}$  e  $\overline{B_1B_2}$  nella proiezione ortogonale corrisponde la coppia  $\overline{A'_1A'_2}$  e  $\overline{B'_1B'_2}$  nell'assonometria. Si ricorda che nell'assonometria cavaliere gli assi  $x'$  ed  $y'$  sono scelti arbitrariamente, ma le scale sui due assi sono uguali.

Le altre coppie, ad esempio  $\overline{MN}$  e  $\overline{PQ} \perp$  nella proiezione ortogonale, si costruiscono secondo le regole dell'assonometria: si ottengono  $\overline{M'N'}$  e  $\overline{P'Q'}$  non più  $\perp$  e di misura diversa.  $\overline{M'N'}$  e  $\overline{P'Q'}$  come  $\overline{A'_1A'_2}$  e  $\overline{B'_1B'_2}$  sono diametri coniugati.

Vogliamo ora cercare quella coppia di diametri del cerchio tra loro perpendicolari che si mantengono ancora perpendicolari nell'assonometria.

Con riferimento alla figura seguente supponiamo di aver costruito una coppia di diametri coniugati (ad esempio  $\overline{A'_1A'_2}$  e  $\overline{B'_1B'_2}$ ) come visto in precedenza.

- 1) Con centro in  $O'$  si traccia una circonferenza di raggio  $\overline{O'A'_1}$
- 2) Si conduce per  $A'_2$  la  $\perp$  ad  $y'$
- 3) Su detta normale, a partire da  $A'_2$ , si riportano i segmenti  $\overline{A'_2E}$  e  $\overline{A'_2F}$  uguali a  $\overline{O'A'_1}$  (si ricorda che  $\overline{O'A'_1} = \overline{O'A'_2} = \overline{O'B'_1} = \overline{O'B'_2}$ )
- 4) Si tracciano le rette  $r'$ , passante per  $O'$  ed  $F$ , ed  $s'$ , passante per  $O'$  ed  $E$
- 5) Si costruiscono le bisettrici degli angoli  $\widehat{r's'}$



$$a_{22}mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0 \quad (\text{B.11})$$

dove  $m$  ed  $m'$  sono i coefficienti angolari dei diametri coniugati (essendo  $y_1 = mx_1$  e  $y_1 = m'x_1$  le equazioni delle rette  $x'$  ed  $y'$  che contengono i diametri).

L'equazione canonica dell'ellisse rispetto ad  $x_1$  ed  $y_1$  è:

$$\frac{x_1^2}{\rho_{y_1}^2} + \frac{y_1^2}{\rho_{x_1}^2} = 1 \quad (\text{B.12})$$

cioè:

$$\rho_{x_1}^2 x_1^2 + \rho_{y_1}^2 y_1^2 - \rho_{x_1}^2 \rho_{y_1}^2 = 0$$

Il confronto di quest'ultima equazione con la (B.10) comporta che, affinché le equazioni (B.10) e (B.12) rappresentino la stessa curva, sia pure rispetto ad assi diversi, debba essere:

$$a_{11} = \rho_{x_1}^2 \quad a_{12} = 0 \quad a_{22} = \rho_{y_1}^2 \quad a_{33} = -\rho_{x_1}^2 \rho_{y_1}^2$$

Pertanto la (B.11) diviene:

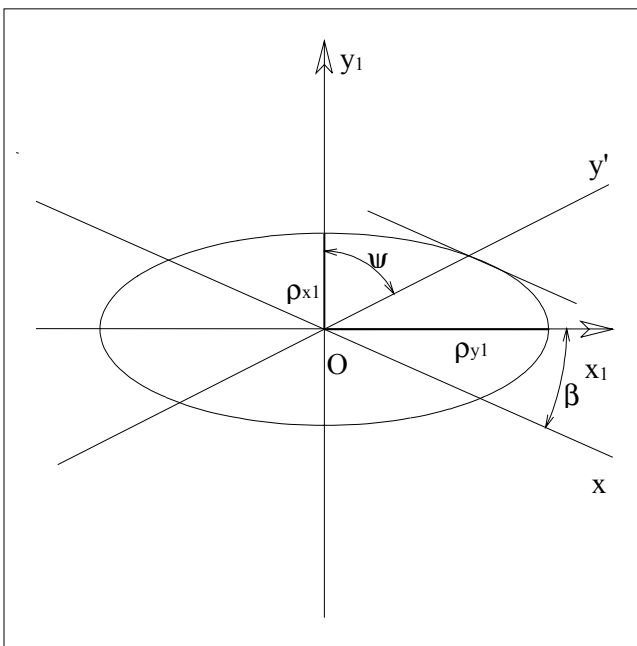
$$\rho_{y_1}^2 mm' + \rho_{x_1}^2 = 0$$

che conduce alla:

$$mm' = -\frac{\rho_{x_1}^2}{\rho_{y_1}^2}$$

che fornisce infine:

$$m = -\frac{\rho_{x_1}^2}{\rho_{y_1}^2} \frac{1}{m'} \quad (\text{B.13})$$



Ora, con riferimento alla figura, essendo:

$$m' = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \psi\right) \quad m = \tan \beta$$

od altrimenti:

$$m' = -\cot \psi \quad m = \tan \beta$$

sostituendo nella (B.13) si ottiene:

$$-\cot \psi = -\frac{\rho_{x_1}^2}{\rho_{y_1}^2} \frac{1}{\tan \beta}$$

ed anche:

$$\tan \psi = \frac{\rho_{y_1}^2}{\rho_{x_1}^2} \tan \beta$$

che fornisce infine:

$$\tan \psi = \frac{I_{y_1}}{I_{x_1}} \tan \beta$$